

# 外国為替市場の価格変動に対する非マルコフ的な統計的特徴について

## Non Markovian Feature of the Price Dynamics on Foreign Exchange Market

落合 友四郎<sup>1\*</sup> ホセ ナチエル<sup>2\*</sup>  
Tomoshiro Ochiai<sup>1</sup> Jose Nacher<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 大妻女子大学社会情報学部

<sup>1</sup> School of Social Information Studies, Otsuma Women's University

<sup>2</sup> 東邦大学理学部

<sup>2</sup> Faculty of Science

**Abstract:** In recent years, several stylized facts have been uncovered in econophysics. Here, we perform an extensive analysis of forex data that leads to unveil a statistical financial law. First, our findings show that, in average, volatility increases more when the price exceeds the highest (lowest) value (i.e. breaks resistance line). We call it (*breaking-acceleration effect*). Secondly, our results show that the probability  $P(T)$  to break the resistance line in the past  $T$  time follows power-law in both real data and theoretically simulated data. However, the probability calculated using real data is rather lower than the one obtained using a traditional Black-Scholes (BS) model. Taken together, the present analysis characterizes a new stylized fact of financial markets and shows that the market exceeds a past (historical) extreme price fewer times than expected by the BS model (*resistance effect*). However, when the market does it, we predict that the average volatility at that time point will be much higher. These findings indicate that any markovian model does not faithfully capture the market dynamics.

## 1 はじめに

金融市場におけるいわゆる Stylized facts として、次のような 4 つの事実が知られている。まず第 1 の Stylized fact は、株式、為替市場をはじめとするさまざまな市場で、多くの場合、価格変動 (log return) の分布がべき乗則に従うことである [1, 2, 3, 4, 5]。第 2 の Stylized fact は、価格変動の自己相関はほぼゼロである事実である [6, 7]。第 3 の Stylized fact は、価格変動の絶対値の自己相関がゆっくり減少することであり、volatility clustering と呼ばれる [2, 7, 8, 9]。これは、大きい変動の後には、大きい変動が続き易いことを意味する。第 4 の Stylized fact は、aggregational normality と呼ばれ、時間スケールを大きくすると、価格変動の分布の裾野が薄くなり、べき乗則からガウス型に近づく事実

がある [5, 10]。

今回、外国為替市場における米ドル・日本円 (USD/JPY) とユーロ・米ドル (EUR/USD) の日足、4 時間足、1 時間足、5 分足、1 分足の 4 本値データを解析して、第 5 の Stylized fact を提案した [11]。第 1 に、ほとんどのケースで、為替レートが、過去  $T$  期間の最高値 (最安値) を更新したとき、ボラティリティ  $V(T)$  が大きくなる。そして、ボラティリティ  $V(T)$  の増加は、期間  $T$  が長いほど大きくなる。言い換えると、過去最安値や過去最高値を更新したときに、値動きが加速される。第 2 に、過去  $T$  期間の最高値 (最安値) を更新する確率  $P(T)$  は、べき乗則に従うことを示した。さらに、この確率は、ランダムウォーク (Black Scholes モデル) のモデルから予想される確率よりも低いことを見出した。つまり、実際の値動きは、ランダムな値動きに比べて、過去最高値 (最安値) を更新しにくい。

\*連絡先: <sup>1</sup> 大妻女子大学社会情報学部情報デザイン専攻  
〒206-8540 東京都多摩市唐木田 2 丁目 7 番地 1  
E-mail: ochiai@otsuma.ac.jp  
<sup>2</sup> 東邦大学理学部情報科学科  
〒274-8510 千葉県船橋市三山 2 - 2 - 1  
E-mail: nacher@is.sci.toho-u.ac.jp

## 2 提案方法

この節では、我々の新しい指標を導入する。金融市場では、ヒストリカルデータは、各時間幅  $[t, t + \Delta t]$  で始値、高値、安値、終値の4本値で記述される。時間幅  $\Delta t$  としては、1分、5分、1時間、4時間、1日を用いる。 $o[t]$ ,  $h[t]$ ,  $l[t]$ ,  $c[t]$  を時間幅  $[t, t + \Delta t]$  の始値、高値、安値、終値としよう。

現在時刻を  $t$  とする時、過去  $T$  期間の最高値を  $M[t, T]$  と定義する。

$$M[t, T] = \max_{t-T \leq s < t} (h[s]) \quad (1)$$

同様に、現在時刻を  $t$  とする時、過去  $T$  期間の最安値を  $m[t, T]$  とする。(図1)。

$$m[t, T] = \min_{t-T \leq s < t} (l[s]) \quad (2)$$

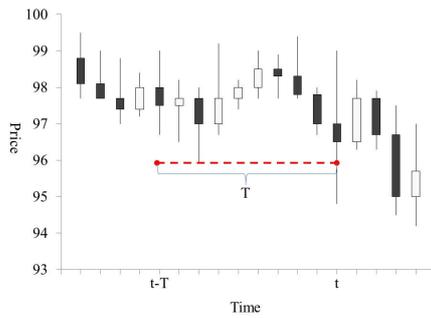


図1: 外国為替市場の4本値の時系列データを表す。時刻  $t$  で、価格は  $m[t, T]$  を下回る。(つまり、過去  $T$  期間 ( $t - T$  から  $t$  の期間) の最安値を下回る。) 赤い点線は、サポートラインと呼ばれ、 $m[t, T]$  を表す。

### 2.1 Breaking volatility

この節では、高値(安値)更新の加速効果 (breaking-acceleration effect) を確認するための、新しい計量を定義する。

$t_1$  と  $t_2$  を、観測するヒストリカルデータの最初と最後の時刻とする。それゆえ、データ数は、 $(t_2 - t_1)/\Delta t$  となる。期間  $[t_1, t_2]$  における平均 volatility は以下で与えられる。

$$V_0 = \frac{1}{(t_2 - t_1)/\Delta t} \sum_{t_1 < t < t_2} (h[t] - l[t]) \quad (3)$$

為替レートが、過去  $T$  期間の最高値  $M[t, T]$  を超えた時刻の集合を、 $\Omega_u[T] = \{t \in [t_1, t_2] : h[t] > M[t, T]\}$  とする。そして、 $\alpha_u[T]$  を、集合  $\Omega_u[T]$  の要素数とする。

為替レートが、過去  $T$  期間の最高値  $M[t, T]$  を超える時の平均 volatility を  $V_u[T]$  と定義する。

$$V_u[T] = \frac{1}{\alpha_u[T]} \sum_{t \in \Omega_u[T]} (h[t] - l[t]). \quad (4)$$

同様に、為替レートが、過去  $T$  期間の最安値  $m[t, T]$  を下回る時の平均 volatility を  $V_d[T]$  と定義する。

$$V_d[T] = \frac{1}{\alpha_d[T]} \sum_{t \in \Omega_d[T]} (h[t] - l[t]) \quad (5)$$

ここで、 $\Omega_d[T] = \{t \in [t_1, t_2] : l[t] < m[t, T]\}$  であり、 $\Omega_d[T]$  の要素数を  $\alpha_d[T]$  とする。

$V_u[T]$  と  $V_d[T]$  を次のように規格化する。

$$v_u[T] = V_u[T]/V_0 \quad (6)$$

$$v_d[T] = V_d[T]/V_0 \quad (7)$$

以下では、 $v_u[T]$  と  $v_d[T]$  を、*breaking volatility* とよぶ。

### 2.2 Breaking probability

次に、レジスタンス(サポート)効果 (resistance effect) を観測するための計量を定義する。

為替レートが、過去  $T$  期間の最高値  $M[t, T]$  を超える確率を  $P_u[T]$  とする。

$$P_u[T] = \frac{\alpha_u[T]}{(t_2 - t_1)/\Delta t} \quad (8)$$

同様に、為替レートが過去  $T$  期間の最安値  $m[t, T]$  を下回る確率を  $P_d[T]$  とする。

$$P_d[T] = \frac{\alpha_d[T]}{(t_2 - t_1)/\Delta t} \quad (9)$$

以後、 $P_u[T]$  と  $P_d[T]$  を *breaking probability* と呼ぶ。

## 3 ランダムウォークモデル

金融理論(金融工学)において、ほとんどの理論モデルは、(確率)微分方程式に基づきマルコフ的な性質 (short memory) をもつ。これらのモデルでは、現在の価格は、直近の価格によって決まり、遠い過去の価格には依存しない。確率微分方程式に基づく最も有名なモデルとして、ブラックショールズモデル (Black-Scholes (BS) model) が知られている [12]。ここでは、実データの解析と比較するために、BSモデルで用いられる確率微分方程式を用いて、シミュレーションを行う。

BSモデルの価格方程式は、ドリフト項 (drift term) と拡散項 (diffusion term) と2つの部分から成り立つ。ここでは、簡単のためにドリフト項のないBSモデルの方程式を用いる。

$$dX_t = X_t \sigma dW_t \quad (10)$$

ここで、確率変数  $X_t$  は為替レートを表し、 $\sigma$  は定数、 $W_t$  はWiener過程である [13]。この式を離散化すると、

$$X_{t+\Delta t} = X_t(1 + \sigma \Delta W_t) \quad (11)$$

となるが、この式を用いて、実データ解析を比較するためのシミュレーションを行う。このシミュレーションの結果は、図2と図3では、点線で示されている。

### 3.1 データ解析の結果

ヒストリカルデータは、[15] からダウンロードした。為替データとして、米ドル・日本円 (USDJPY) とユーロ・米ドル (EURUSD) をもちいて、時間足  $\Delta t$  としては、1日、4時間、1時間、5分、1分を採用した。また、1分足データとしては2010年5月1日から2010年5月31日までの期間、5分足データとしては2010年1月1日から2010年5月31日までの期間、1時間足データとしては2005年1月1日から2010年5月31日までの期間、4時間足データとしては2001年1月1日から2010年5月31日までの期間、日足データとしては2001年1月1日から2010年5月31日までの期間を用いた。

USDJPY の為替レートの breaking volatility  $v_d[T]$  を、図2に示した。この結果は、期間  $T$  が大きくなると、ほとんどの場合、volatility が大きくなることを示している。それに比べて、シミュレーション (ランダムウォークモデル) の場合は、 $T$  が変化しても、volatility はほとんど変わらない。それゆえ、実データは、高値 (安値) 更新の加速効果 (breaking-acceleration effect) があることを示している。

図3に、USDJPY に対する breaking probability  $P_d[T]$  を示した。まず最初に、実データとシミュレーションの両方とも、 $P_d[T]$  はべき乗則に従うことがわかる。しかし、多くの場合、実データは、ランダムウォークの場合に比べて、 $P_d[T]$  が小さいことがわかる。これは、実データには、最安値 (最高値) にはサポート (レジスタンス) 効果があることを示している。

さらに一般的に、これら (breaking-acceleration effect と resistance effect) の効果は、(例えば、1分足、5分足など) 時間幅  $\Delta t$  が短いほど強いことがわかる。しかし、(例えば、日足、4時間足など) 時間幅  $\Delta t$  が長いほど、これらの効果は弱くなり、ランダムウォークの場合に似てくる。

USDJPY の  $v_u[T]$  と  $P_u[T]$  と、EURUSD に関する結果は、[11] を参照してほしい。

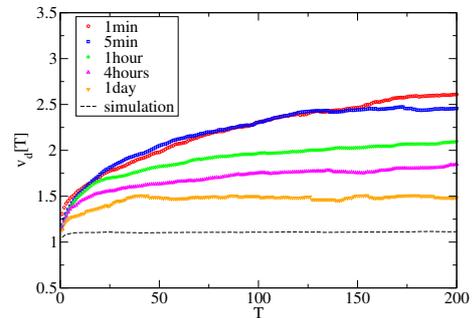


図2: USDJPY の為替レートに対する  $v_d[T]$

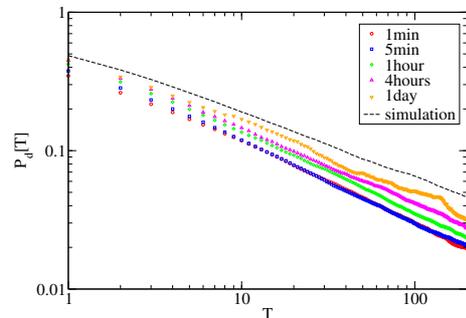


図3: USDJPY の為替レートに対する  $P_d[T]$ 。べき乗則を観測される。

## 4 むすび

外国為替市場のヒストリカルデータを解析することにより、新しい stylized fact として、高値 (安値) 更新の加速効果 (breaking-acceleration effect) とレジスタンス (サポート) 効果 (resistance effect) およびそれに付随するべき乗則などのいくつかの性質を示した。具体的には、値動きが過去最高値 (最安値) を更新する確率は、ランダムウォークの場合よりも小さいが、いったん更新されると、その時の volatility は、ランダムウォークの場合よりも大きくなる。

これらの性質から示唆されることは、現実の金融市場 (外国為替市場) の値動きは、long memory を持つということだ。なぜなら、volatility が、直近の価格のみならず、はるか過去の最高値 (最安値) にも依存するからである。それゆえ、short memory を基礎としたマルコフモデル (例えば直近の価格のみに現在の価格が依存する微分方程式などのモデル) では、忠実に金融市場のダイナミクスを再現することはできない。実

際に、今回の Black-Scholes で用いられる確率微分方程式を利用したシミュレーションでも、高値（安値）更新の加速効果（breaking-acceleration effect）は再現されない。

ここで、我々の結果と、既存の 2 つの stylized fact との関連性を述べる。第 1 の stylized fact は、価格変動（log return）の分布がべき乗則に従うということだが、これは価格変動（log return）の分布がファットテール（厚い裾野）を持つことを意味する。このファットテールは、 $\Delta t = 1min, 5min$  のような短い時間幅の場合、顕著に観測されるが、時間幅  $\Delta t$  が大きくなると、分布のテールは正規分布の形に近づいていく（第 4 の stylized fact の aggregational normality）。

一方、我々の結果は、時間幅  $\Delta t$  が小さくなると、実データの breaking volatility  $v_d[T], v_u[T]$  も、breaking probability  $P_u[T], P_d[T]$  も両方ともランダムウォークモデル（BS モデル）から乖離した結果になる。しかし、時間幅  $\Delta t$  が大きくなると、breaking volatility も breaking probability も両方ともランダムウォークモデルのシミュレーション結果に似てくる。ランダムウォークモデル（BS モデル）では、価格変動（log return）の分布はガウス型のテール（裾野）をもつので、我々の結果は既存の第 1 と第 4 の stylized fact と整合性がある。

我々は、外国為替市場で新しい stylized fact を提案したが、株式市場をはじめとする他の金融市場でも同様な性質が成り立つであろう。また、これらの性質は、市場参加者の過去最高値（最安値）にたいする心理的な効果に基づくと思われるが、何らかのモデルによって再現することが期待される。そして、これらの実データ解析に基づく理論モデルの構築は、経済物理学に新たなブレークスルーをもたらすであろう。

## 参考文献

- [1] R. N. Mantenga and H. E. Stanley, *An introduction to Econophysics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2000).
- [2] B. Mandelbrot, *Journal of Business* **36**, 394 (1963).
- [3] P. Gopikrishnan, V. Plerou, L.A. Amaral, M. Meyer and H.E. Stanley, *Phys. Rev. E*, **60**, 5305 (1999).
- [4] P. Gopikrishnan, M. Meyer, L.A. Amaral and H.E. Stanley, *The European Physical Journal B*, **3**, 139 (1998).
- [5] T.Mizuno, S.Kurihara, M.Takayasu and H. Takayasu *Physica A* **324**, 296 (2003).
- [6] A. Pagan, *Journal of Empirical Finance*, **3**, 15 (1996).
- [7] R. Cont, M. Potters and J.P. Bouchaud, *In Proceedings of the Scale Invariance and Beyond: Les Houches Workshop 1997*, edited by F.G. B. Dubrulle and D. Sornette 1997, Springer.
- [8] Y. Liu, P. Cizeau, M. Meyer, C.K. Peng and H.E. Stanley, *Physica A* **245**, 437 (1997).
- [9] P. Cizeau, Y. Liu, M. Meyer, C.K. Peng, and H.E. Stanley, *Physica A* **245**, 441 (1997).
- [10] L. Kullmann, J. Toyli, J. Kertesz, A. Kanto and K. Kaski, *Physica A* **269**, 98 (1999).
- [11] J.C. Nacher, T. Ochiai, *Phys. Rev. E*, **85**, 056118 (2012)
- [12] F. Black and M. Scholes, *J. Polit. Econ.* **81**, 637 (1973).
- [13] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*, Springer-Verlag, Berlin (1990).
- [14] T. Ochiai and J.C. Nacher, *Physics letters A*, **375**, 3552 (2011).
- [15] <http://www.forextester.com/data/datasources.html>